

# Analyse de contraintes probabilistes dans la gestion d'un système hydroélectrique

## Analysis of probabilistic constraints in the management of a hydroelectric power system

D. Richard et A. Turgon

Volume 1, numéro 3, 1988

URI : <https://id.erudit.org/iderudit/705007ar>

DOI : <https://doi.org/10.7202/705007ar>

[Aller au sommaire du numéro](#)

Éditeur(s)

Université du Québec - INRS-Eau, Terre et Environnement (INRS-ETE)

ISSN

0992-7158 (imprimé)

1718-8598 (numérique)

[Découvrir la revue](#)

Citer cet article

Richard, D. & Turgon, A. (1988). Analyse de contraintes probabilistes dans la gestion d'un système hydroélectrique. *Revue des sciences de l'eau / Journal of Water Science*, 1(3), 161–178. <https://doi.org/10.7202/705007ar>

Résumé de l'article

La gestion des systèmes hydroélectriques s'effectue de plus en plus dans un contexte multi-objectifs car l'eau sert non seulement à produire de l'électricité mais bien à d'autres fins comme la navigation, le flottage du bois, et l'alimentation des municipalités. Dans cet article, nous montrons comment ces autres fins peuvent être incorporées sous forme de contraintes probabilistes dans un modèle de gestion à long terme des installations d'une vallée. Le problème devient alors de non seulement résoudre le problème de gestion mais bien d'ajuster la valeur des contraintes probabilistes de façon à ce que la probabilité de ne pas satisfaire les besoins des autres usagers soit acceptable. Le choix de la probabilité de dépassement des contraintes a naturellement un effet sur la production d'électricité. Une étude effectuée sur la rivière St-Maurice permettra de montrer l'importance de celle-ci.

# Analyse de contraintes probabilistes dans la gestion d'un système hydroélectrique

Analysis of probabilistic constraints in  
the management of a hydroelectric power system

---

D. RICHARD (1) et A. TURGEON (2)

---

## RÉSUMÉ

La gestion des systèmes hydroélectriques s'effectue de plus en plus dans un contexte multi-objectifs car l'eau sert non seulement à produire de l'électricité mais bien à d'autres fins comme la navigation, le flottage du bois, et l'alimentation des municipalités. Dans cet article, nous montrons comment ces autres fins peuvent être incorporées sous forme de contraintes probabilistes dans un modèle de gestion à long terme des installations d'une vallée. Le problème devient alors de non seulement résoudre le problème de gestion mais bien d'ajuster la valeur des contraintes probabilistes de façon à ce que la probabilité de ne pas satisfaire les besoins des autres usagers soit acceptable. Le choix de la probabilité de dépassement des contraintes a naturellement un effet sur la production d'électricité. Une étude effectuée sur la rivière St-Maurice permettra de montrer l'importance de celle-ci.

**Mots clés :** *Système hydroélectrique, gestion de la production, modèle stochastique, contraintes probabilistes, optimisation, programmation dynamique.*

## SUMMARY

The paper deals with the problem of determining the amount of water to release from several reservoirs located in the same

---

(1) Hydro-Québec, Planification des équipements,  
1001 est de Maisonneuve, Montréal, Québec.

(2) Hydro-Québec (IREQ), Varennes, Québec J0L 2P0.

river basin, so as to satisfy the demand for electricity at minimal cost while respecting a set of constraints related to environment protection, flood control, wood floating and navigation. Would the demand for electricity and the river inflows be known for the entire period studied, that the problem could be written

$$\text{Minimize } \{Z (D - H(X)) / AX \geq \theta, X \in \Gamma\}, \quad (1)$$

Where  $Z$  is the cost function,  $D$  the demand for electrical energy,  $H(X)$  the hydroelectric production,  $AX \geq \theta$  the set of constraints mentioned above, and  $\Gamma$  the set of admissible solutions. However, since the demand for electricity and the river inflows cannot be forecasted a long time in advance, and since they change significantly from one year to the next, the constraints  $AX \geq \theta$  cannot always be respected. For instance, maintaining the level of reservoir  $i$  above  $\theta_i$  may be impossible in a period of very low flow. In order to find a solution to the problem, the constraints  $AX \geq \theta$  were replaced by the probabilistic constraints  $\Pr(AX \geq \theta) \leq B$  and the problem rewritten

$$\text{Minimize } E \{Z (D - H(X))\} \quad (2)$$

$$\text{s.t. } \Pr(AX < \theta) \leq B \quad (3)$$

$$X \in \Gamma \quad (4)$$

Where  $E$  denotes the mathematical expectation and  $\Pr$  the probability. In the solution procedure, however, constraints (3) are not directly taken into account, but are replaced by additional terms in the objective function which penalize violations of the constraints. The parameters of these penalty terms are adjusted iteratively until constraints (3) are respected. More precisely, values are chosen for the parameters and the problem is solved by stochastic dynamic programming. Next, the operation of the reservoirs is simulated over hundreds of years to find out whether constraints (3) are respected with the parameters initially selected. If the constraints are too often violated or not enough, the values of the parameters are changed and the problem solved again. This approach has been applied to the St-Maurice river in Canada, where upper limits on the flow exist at different points along the river to prevent floods. The aim of the study was to find an operating policy that respects these upper limits 95 % of the time, and to determine what effects such policy has on the production of hydroelectric energy.

Key-words : *Hydroelectric system, production scheduling, stochastic model, probabilistic constraints, optimization, dynamic programming.*

## 1 - INTRODUCTION

La gestion des systèmes hydriques consistent à déterminer les soutirages devant être effectués sur un ensemble d'ouvrages de contrôle pour concilier l'ensemble des besoins des usagers. A Hydro-Québec, cette gestion doit être faite dans un cadre multi-objectifs car, en plus de l'objectif majeur de production qui consiste à allouer la ressource dans le temps pour répondre à la demande d'électricité, une série de sous-objectifs reliés à l'utilisation de l'eau par d'autres usagers sont également en cause. Ces sous-objectifs concernent principalement la lutte contre les inondations, le flottage du bois et l'environnement. Ils s'expriment par le maintien, à différentes périodes de temps, de certains débits en rivière et de niveaux dans les réservoirs.

Si la demande d'électricité et les apports d'eau naturel ne variaient pas d'une année à l'autre, ces sous-objectifs pourraient être représentés par un ensemble de contraintes déterministes dans le problème de gestion de sorte que celui-ci pourrait s'écrire mathématiquement comme suit :

$$\text{Minimiser } \{Z(D-H(X)) \mid AX \geq \theta, X \in \Gamma\} \quad (1)$$

où  $Z$  est une fonction de l'écart entre la demande d'énergie électrique  $D$  et la production hydroélectrique  $H(X)$ ,  $AX \geq \theta$  dénote l'ensemble des contraintes associées aux sous-objectifs du problème (flottage, inondation, ...) et où  $\Gamma$  représente l'ensemble des solutions physiquement réalisables. Cependant, comme la demande d'électricité et les apports naturels varient sensiblement d'une année à l'autre, il arrive que les contraintes  $AX \geq \theta$  ne peuvent pas être toutes satisfaites. Par exemple, maintenir le débit au site  $i$  au-dessus d'un certain seuil  $\theta_i$  peut être tout simplement impossible au cours d'une période de très faible hydraulicité. Le problème revient donc à trouver la solution la plus satisfaisante pour l'ensemble des usagers puisqu'il n'existe pas de solution au problème (1).

Supposons que dans le passé la contrainte  $AX \geq \theta$  a été satisfaite durant  $\beta$  % du temps (où  $\beta$  est un vecteur de même dimension que  $X$ ), et que ceci a satisfait l'ensemble des usagers. On devrait alors viser au moins à obtenir les mêmes résultats dans le futur et par conséquent ajuster la production hydroélectrique de façon à

$$\text{Minimiser } E \{Z(D-H(X))\} \quad (2)$$

$$\text{sous } \Pr (AX \geq \theta) \leq \beta \quad (3)$$

$$X \in \Gamma \quad (4)$$

où  $E$  dénote l'espérance mathématique par rapport à la demande d'électricité et aux apports naturels et  $\Pr$  la probabilité.

Résoudre le problème (2) - (4) ne pose aucune difficulté lorsque la valeur de  $\beta$  est connue au départ. Mais lorsqu'elle ne l'est pas ou lorsque celle-ci ne satisfait pas tous les usagers, le problème devient beaucoup plus difficile puisqu'il faut trouver une façon de déterminer celle-ci tout en résolvant (2) - (4). Il existe en pratique deux façons de déterminer la valeur de  $\beta$  qui sont la génération des solutions non-inférieures et la façon progressive.

## 1-1 Génération des solutions non-inférieures

La génération des solutions non-inférieures consiste à résoudre le problème (2) - (4) pour un ensemble de valeurs positives de  $\beta$ . Par la suite l'ensemble des solutions est présenté aux usagers pour choisir celle qui est la plus satisfaisante.

Toutefois, si le nombre de sous-objectifs est élevé et que la détermination de chacune des solutions non-inférieures nécessite beaucoup de temps de calcul, cette façon de faire devient vite irréalisable. En effet, si l'on désigne par  $p$  le nombre de sous-objectifs dans (3) et par  $K$  le nombre de valeurs que peut prendre chaque  $\beta$ , le nombre d'optimisations à effectuer pour déterminer les solutions non-inférieures sera égal à  $K^p$ .

En considérant un système avec 15 sous-objectifs et 3 valeurs possibles pour chaque élément de  $\beta$  le nombre d'optimisations devient pour le moins astronomique, soit 14,348,907 optimisations !!

## 1-2 Détermination de $\beta$ de façon progressive

Ici l'approche considère la détermination d'une valeur satisfaisante de  $\beta$  comme un processus itératif et interactif. Une première solution est déterminée à partir d'une valeur quelconque de  $\beta$  et les résultats sont présentés aux usagers pour connaître leurs réactions. Comme première valeur de  $\beta$  on devrait prendre celle qui correspond aux résultats obtenus dans le passé lorsqu'un historique d'exploitation existe. Suite aux réactions des usagers la valeur de  $\beta$  est modifiée et une nouvelle solution est déterminée. Cette étape est répétée jusqu'à l'obtention d'une solution jugée satisfaisante pour les usagers.

Dans le cadre de la gestion d'un réseau hydroélectrique, la détermination des valeurs satisfaisantes de  $\beta$  doit être fait *a priori*. En effet l'exploitation des systèmes hydriques demande que des décisions soient prises au jour le jour. Dans ce contexte il serait impossible de déterminer une nouvelle valeur pour  $\beta$  chaque fois qu'une décision doit être prise. Dans l'opération courante, la valeur de  $\beta$  sera donc considérée constante à moins qu'une modification sensible survienne dans la demande d'électricité, dans la distribution des apports ou dans les objectifs visés par les usagers.

Dans ce qui suit, nous présenterons un outil mathématique permettant de résoudre le problème (2) - (4) en considérant des valeurs de  $\beta$  déterminées *a priori*. Nous traiterons successivement de la formulation du problème et de la méthode de solution. Une application sera par la suite effectuée sur le bassin de la rivière St-Maurice au Québec.

Cette application tentera de mettre en lumière la façon de déterminer une politique de gestion qui satisfait nos contraintes probabilistes. Nous analyserons également les répercussions de ces contraintes sur la production hydroélectrique.

## 2 - FORMULATION DU PROBLÈME

Le système dont nous étudierons la gestion se limitera à une rivière et à ses affluents. Ceux-ci toutefois pourront contenir plusieurs installations hydroélectriques de tailles et de types différents. Toutes ces installations seront supposées être situées assez près l'une de l'autre pour que le coefficient de corrélation entre les apports naturels à deux sites quelconques soit considéré égal à l'unité. Ainsi une seule distribution de probabilité sera nécessaire pour représenter les apports naturels de toute la vallée.

La période de calcul sera hebdomadaire. Comme le temps pris par l'eau pour franchir la distance entre deux installations voisines est généralement beaucoup plus petit que la semaine il sera par conséquent négligé.

### 2-1 Les variables et les contraintes physiques

Les variables que l'on retrouve dans notre modèle sont les suivantes :

$G_k$  : la production d'énergie électrique, en GWh, assignée à la vallée dans la semaine  $k$  ;

$Y_k$  : la variable aléatoire représentant l'apport naturel moyen en  $m^3/s$  la vallée dans la semaine  $k$ . L'apport naturel moyen au site  $i$  est dénoté par  $Y_{ik}$  et sera supposé égal à  $b_i Y_k$  où  $b_i$  est la fraction de l'apport total de la vallée entrant au site  $i$  ;

$U_{ik}$  : le tirage utile en  $m^3/s$  du réservoir  $i$  dans la semaine  $k$  ;

$$0 \leq U_{ik} \leq UC_i \quad (5)$$

où  $UC_i$  est la capacité de turbinage de la centrale  $i$  ;

$x_{ik}$  : le contenu du réservoir  $i$  en  $hm^3$  au début de la semaine  $k$  ;

$$0 \leq x_{ik} \leq XM_i \quad (6)$$

où  $XM_i$  est la capacité du réservoir. Il est à noter que le contenu du réservoir au début de la semaine  $k$  est relié à celui du début de la semaine  $k-1$  par l'équation suivante :

$$x_{ik} = x_{i,k-1} + 0,6048 (A_{ik} - U_{ik} - V_{ik}) \quad (7)$$

où  $A_{ik}$  représente la somme des apports naturels  $Y_{ik}$  et des soutirages effectués aux réservoirs situés immédiatement en amont du réservoir  $i$  en  $m^3/s$ .

$V_{ik}$  : le déversement moyen en  $m^3/s$  du réservoir  $i$  dans la semaine  $k$  ;

$$0 \leq V_{ik} \leq VC_i(x_{ik}) \quad (8)$$

où  $VC_i(x_{ik})$  représente le débit maximum possible du réservoir  $i$  par les évacuateurs de crue en fonction de son contenu ;

$H_{ik}$  : la production d'énergie en GWh, de la centrale  $i$  dans la semaine  $k$ .  
Il sera supposé que :

$$H_{ik} = \gamma_i h_i(x_{ik}) U_{ik} \quad (9)$$

où  $\gamma_i$  est un facteur de conversion directement proportionnel au rendement moyen de la centrale, et  $h_i(x_{ik})$  est la hauteur de chute au début de la semaine  $k$ . Cette hauteur est généralement fonction du contenu du réservoir qui alimente la centrale.

## 2-2 Les contraintes d'opération

En plus des contraintes physiques décrites ci-dessus il pourrait exister des contraintes d'opération que les utilisateurs aimeraient, si possible, voir respectées. Par exemple, une de ces contraintes pourrait être un niveau maximum que l'on impose à un réservoir durant une période critique pour se prémunir contre tout danger d'inondation. Une autre pourrait être de maintenir le réservoir à un niveau minimum durant l'été pour permettre le flottage du bois. Finalement certaines contraintes pourraient aussi être imposées aux débits afin d'éviter les problèmes d'inondations et d'étiages.

Bref, en termes mathématiques ces contraintes d'opération pourraient être exprimées de la façon suivante :

$$x_{ik} > XMIN_{ik} \quad \forall i,k \quad (10)$$

$$x_{ik} < XMAX_{ik} \quad \forall i,k \quad (11)$$

$$U_{ik} + v_{ik} > WMIN_{ik} \quad \forall i,k \quad (12)$$

$$U_{ik} + v_{ik} < WMAX_{ik} \quad \forall i,k \quad (13)$$

où  $XMIN_{ik}$  et  $XMAX_{ik}$  représentent respectivement les contenus minimum et maximum permis au réservoir  $i$ , durant la semaine  $k$ , et  $WMIN_{ik}$  et  $WMAX_{ik}$  représentent respectivement les débits minimum et maximum permis au site  $i$ , durant la semaine  $k$ .

Si ces contraintes d'opération pouvaient être respectées en tout temps elles seraient tout simplement ajoutées aux contraintes physiques (5) - (8) pour former l'ensemble des contraintes du problème. Toutefois à cause des aléas de l'hydraulique certaines contraintes d'opération seront violées à l'occasion de sorte qu'il n'existe vraiment pas de solution qui satisfasse l'ensemble des contraintes (5) - (13).

Pour rendre le problème soluble, les contraintes d'opération (10) - (13) seront donc remplacées par les contraintes probabilistes qui suivent :

$$E \sum_{k=1}^K b_{lik} < \alpha_{li} ; l = 1, \dots, 4 ; \forall i \quad (14)$$

$$\text{où } b_{1ik} = \begin{cases} 1 & \text{si } X_{ik} < X_{\text{MIN}ik} \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad (15)$$

$$b_{2ik} = \begin{cases} 1 & \text{si } X_{ik} > X_{\text{MAX}ik} \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad (16)$$

$$b_{3ik} = \begin{cases} 1 & \text{si } U_{ik} + V_{ik} < W_{\text{MIN}ik} \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad (17)$$

$$b_{4ik} = \begin{cases} 1 & \text{si } U_{ik} + V_{ik} > W_{\text{MAX}ik} \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad (18)$$

La signification de ces contraintes est la suivante :  $b_{1ik} = 1$  signifie que la contrainte  $X_{ik} \geq X_{\text{MIN}ik}$  a été violée dans la semaine  $k$ ,  $b_{1ik} = 0$  signifie qu'elle ne l'a pas été.  $\sum_k b_{1ik}$  représente donc le nom-

bre de fois que la contrainte a été violée durant la période étudiée et

$E \sum_{k=1}^K b_{1ik} \leq \alpha_{1i}$  signifie donc que l'espérance mathématique du nombre

de fois que la contrainte est violée durant les  $K$  périodes à l'étude doit être plus petit ou égale à  $\alpha_{1i}$ . A noter que si l'on met  $\alpha_{1i} = 0$ , ces contraintes deviennent identiques aux contraintes (10) - (13). Comme mentionné dans l'introduction, le problème principal est de trouver une solution au problème de gestion qui satisfasse les valeurs de  $\alpha$  déterminées *a priori*.

### 2-3 Le critère d'optimisation

Le critère d'optimisation peut changer avec l'étude effectuée. Toutefois dans le cadre normal de l'exploitation ce critère consiste généralement à minimiser la différence entre la production assignée à la vallée,  $D_k$ , et la production réalisée,  $\sum_i H_{ik}$ . En termes mathématiques ce critère peut s'écrire :

$$\text{Minimiser } E \left\{ \sum_k F \left( D_k - \sum_i H_{ik} \right) \right\} \quad (19)$$

où  $F$  est une fonction convexe de la différence mentionnée. Cette fonction sera précisée lors de l'application numérique.

## 3 - MÉTHODE DE SOLUTION

La programmation dynamique sera utilisée comme méthode de solution du problème stochastique présentée à la section 2.



Lorsque le système contient plus de quatre réservoirs le problème doit être manipulé de façon à réduire le nombre de variables d'états pour pouvoir le solutionner en un temps raisonnable par la programmation dynamique. Les techniques d'agrégation ont été les plus employées jusqu'à date pour résoudre ce type de problème. Elles consistent essentiellement à combiner ensemble plusieurs réservoirs de façon à les remplacer dans le modèle par un réservoir unique d'énergie potentielle. Plusieurs techniques ont été proposées dans le passé dont celles données dans [1] - [2].

Toutefois nous considérons dans cet article que le système contient quatre réservoirs au moins et qu'en conséquence la programmation dynamique telle que présentée par Bellman peut être utilisée. La difficulté revient alors à déterminer une façon de prendre en compte les contraintes représentées par l'équation (14). Plus précisément, l'opération consiste à décomposer la contrainte (14) en une somme de contraintes hebdomadaires de façon à pouvoir appliquer la programmation dynamique. Il existe essentiellement trois façons de le faire :

### 3-1 Introduction de nouvelles variables

La première façon consiste tout d'abord à réécrire la contrainte (14) comme suit :

$$\sum_{k=1}^K E b_{lik} \leq \alpha_{li}$$

puis à introduire une nouvelle variable d'état  $z_{lik}$

$$\text{où } z_{lik} = z_{lik-1} + E b_{lik} \quad ; \quad z_{lik} \leq \alpha_{li} \quad ; \quad z_{110} = 0 \quad (20)$$

et enfin à remplacer (14) par (20).

La difficulté avec cette façon de faire est que l'ensemble des variables d'état augmentera d'un nombre égal à celui des contraintes dans (14) de sorte qu'il deviendra très difficile de résoudre le problème par la programmation dynamique à cause notamment des problèmes de dimension décrits plus haut.

### 3-2 Méthode directe

Dans ce cas la contrainte (14) est adjointe au critère d'optimisation avec un multiplicateur de Lagrange  $\lambda_{li}$ . Le critère d'optimisation devient alors de :

$$\begin{aligned} \text{Maximiser} \quad & \left\{ \text{Minimum}_{u,v} \sum_{k=1}^K [E F(D_k - \sum_i H_{ik}) + \sum_{l,i} \lambda_{li} b_{lik}] \right. \\ & \left. - \sum_{l,i} \lambda_{li} \alpha_{li} \right\} \\ \lambda \geq 0 \end{aligned}$$

sous les contraintes (5) - (9).

Le problème intérieur peut être résolu par la programmation dynamique. Le problème maître peut être résolu par une méthode du gradient similaire à celle décrite par ROSSMAN [3].

### 3-3 Méthode des pénalités

Une autre façon de tenir compte de la contrainte (14) et la plus facile, consiste à ajouter des termes au critère d'optimisation qui pénalisent toute violation de ces contraintes. Ces termes peuvent naturellement prendre différentes formes. Jusqu'à maintenant des fonctions linéaires par parties comme celle montrée à la figure 1 ont été utilisées.

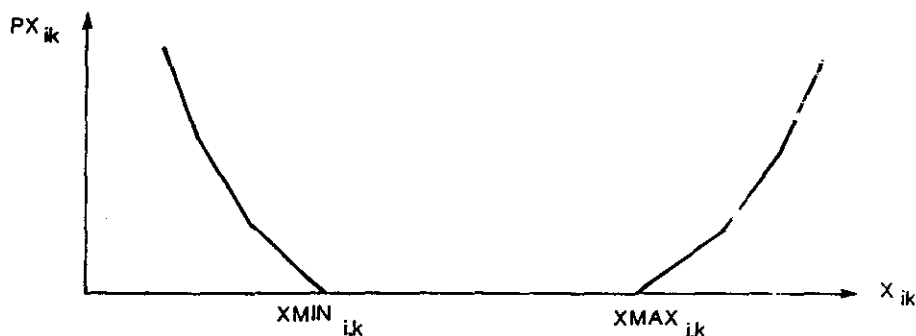


Figure 1.- Fonctions de pénalités.

Figure 1.- Penalty functions.

Les pentes de ces fonctions sont tout d'abord choisies de façon arbitraire puis ajustées progressivement jusqu'à l'obtention des résultats désirés, c'est-à-dire jusqu'à ce que (14) soit satisfaite. La procédure suivie pour les ajuster est de déterminer la règle de gestion des installations de la vallée puis de simuler leur opération sur des centaines d'années, à partir d'apports générés de façon aléatoire, en notant le nombre de fois que chacune des contraintes est violée. Lorsque la contrainte est violée trop souvent ou pas assez, les fonctions de pénalités sont ajustées de nouveau puis une nouvelle règle de gestion est déterminée. La procédure est recommencée jusqu'à ce que les résultats satisfassent les seuils  $\alpha_i$  imposés par les usagers.

Si on dénote par  $PX_{ik}$  la pénalité associée aux contraintes (15) et (16) et par  $PU_{ik}$  celle associée aux contraintes (17) et (18), le problème dans ce cas peut s'écrire sous la forme :

$$\text{Minimiser } \sum_k \left\{ E \left[ f(D_k - \sum_i H_{ik}) \right] + \sum_i (PX_{ik} + PU_{ik}) \right\} \quad (21)$$

sous les contraintes (5) - (9).

La méthode des pénalités sera celle utilisée lors de l'application numérique.

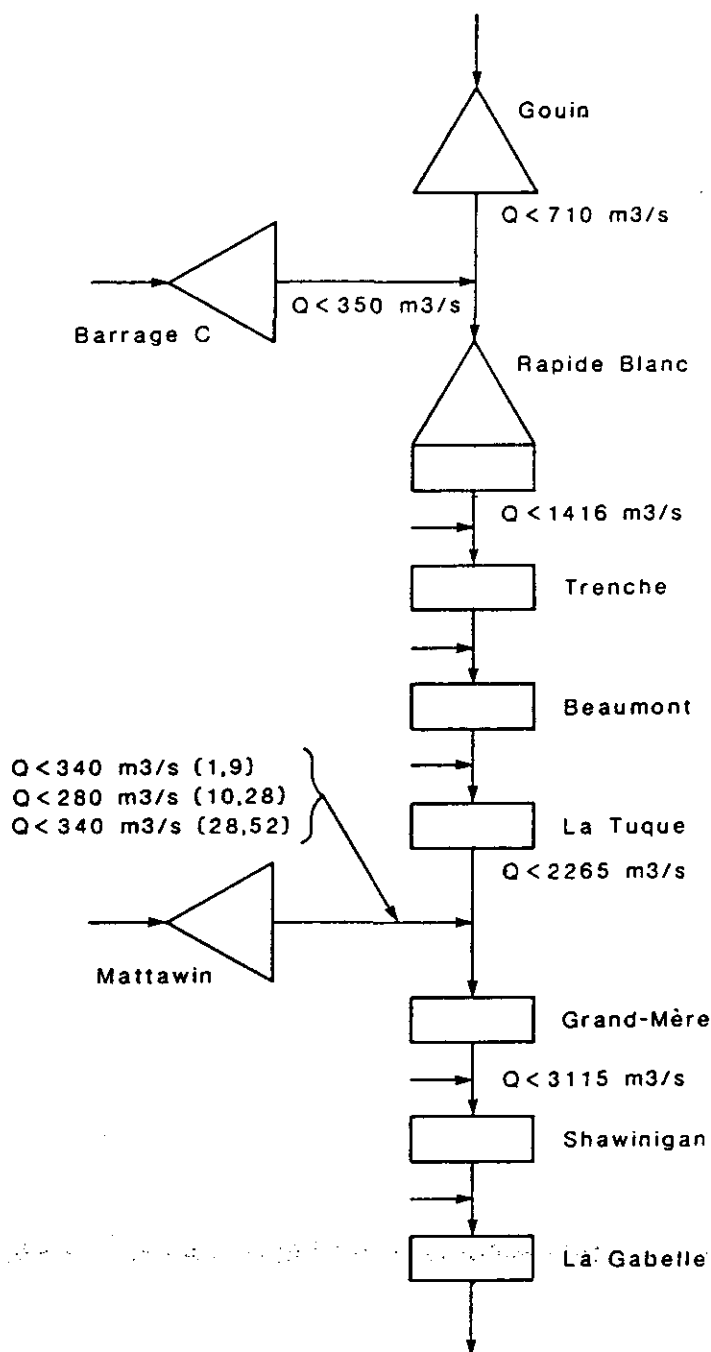


Figure 2.- Installations de la rivière Saint-Maurice.

Figure 2.- Saint-Maurice River.

#### 4 - APPLICATION NUMÉRIQUE

Nous présenterons dans cette section les résultats d'une analyse effectuée sur la rivière St-Maurice du réseau d'Hydro-Québec. Cette rivière possède dix installations dont six centrales au fil de l'eau, une centrale avec un réservoir et 3 réservoirs de régularisation. La figure 2 schématise la disposition des diverses installations et le tableau 1 brosse les principales caractéristiques de chacune d'elles. En ce qui a trait à la centrale Rapide-Blanc, la hauteur de chute donnée au tableau 1 correspond à la hauteur de chute nominale. La hauteur de chute réelle varie de 26 à 35 mètres dépendant du contenu du réservoir qui l'alimente.

Tableau 1.- Caractéristiques principales des installations.

Table 1.- Characteristics of the installations.

i	NOM	du bassin versant $b_i$	$XM_i$ ( $hm^3$ )	$UC_i$ ( $m^3/s$ )	$VC_i (XM_i)$ ( $m^3/s$ )	* $\delta_i$	$\bar{h}_i$ (m)
1	Gouin	0.2316	8577	-	2225	-	-
2	Barrage C	0.0618	1007,8	-	514	-	-
3	Rapide-Blanc	0.2554	460,8	709	4520	.001434	32.92
4	Trenche	0.0956	-	711	5088	.001467	48.46
5	Beaumont	0.0570	-	855	4922	.001483	37.79
6	La Tuque	0.0416	-	751	5396	.001368	34.75
7	Mattawin	0.1095	948	-	1761	-	-
8	Grand-Mère	0.1229	-	740	7338	0.001434	24.38
9	Shawinigan	0.0196	-	896	5647	0.001434	44.20
10	La Gabelle	0.0050	-	917	3820	0.001401	17.37

$$* \delta_i = 9.81 \times \text{rendement}_i \times 24 \times 7 \times 10^{-6}.$$

Sur cette rivière, un ensemble de contraintes sur les débits maximums à soutirer aux diverses installations est en vigueur pour se prémunir contre les inondations. Le tableau 2 énumère les différentes contraintes. Dans le cas du réservoir Mattawin la période d'application de la contrainte de débits maximums a été divisée en trois pour tenir compte des conditions d'écoulement en période de glace.

L'objet de l'étude est de déterminer une politique de gestion qui permette de respecter l'ensemble des contraintes énumérées au tableau 2 avec un certain degré de fiabilité et de quantifier les effets sur la production qu'auraient leurs impositions.

La notion de fiabilité a été réduite ici à la fréquence de dépassement de la contrainte à l'étude. Ainsi, l'amplitude des dépassements et leur résilience (durée) ont été négligées. Dans le cadre de cette étude une fréquence de dépassement inférieure à 5 % a été fixée comme acceptable.

La méthode des pénalités (section 3.3) a été utilisée pour déterminer la politique de gestion satisfaisante. De plus, le critère d'optimisation a été défini comme étant de minimiser le carré de l'écart entre la production et la demande, si bien que la fonction objectif (21) peut s'écrire de la façon suivante :

$$\text{Minimiser } \sum_k E \{ (D_k - \sum_i H_{ik})^2 + \sum_i (PX_{ik} + PU_{ik}) \} \quad (22)$$

sous les contraintes (5) - (9).

Tableau 2.- Contraintes de débits maximums à chacun des sites.

Table 2.- Maximum discharge constraints at each site.

	CONTRAINTES	PERIODE (SEMAINES)
Gouin	$Q < 710 \text{ m}^3/\text{s}$	1-52
Barrage C	$Q < 350 \text{ m}^3/\text{s}$	1-52
Rapide-Blanc	$Q < 1416 \text{ m}^3/\text{s}$	1-52
Trenche	-	-
Beaumont	-	-
La Tuque	$Q < 2265 \text{ m}^3/\text{s}$	1-52
Mattawin	$Q < 340 \text{ m}^3/\text{s}$	1-9
	$Q < 280 \text{ m}^3/\text{s}$	10-28
	$Q < 340 \text{ m}^3/\text{s}$	28-52
Grand-Mère	$Q < 3115 \text{ m}^3/\text{s}$	1-52
Shawinigan	-	-
La Gabelle	-	-

Ce critère d'optimisation aura pour effet de calquer dans la mesure du possible le profil de production au profil de demande.

La première étape de l'étude fut de déterminer la production moyenne de la vallée dans chaque semaine et la fréquence de dépassement de chacune des contraintes en considérant qu'aucune pénalité n'ait été appliquée. Pour se faire, il a fallu tout d'abord déterminer la règle optimale de gestion des quatre réservoirs en résolvant à rebours la fonctionnelle

$$F_k(X_{1,k-1}, X_{2,k-1}, X_{3,k-1}, X_{4,k-1}) = E \left\{ \text{minimum} [(D_k - \sum_i U_{ik})^2 + \sum_i (PX_{ik} + PU_{ik}) + F_{k+1}(X_{1k}, X_{2k}, X_{3k}, X_{4k})] \right\} \quad (23)$$

pour le cas où  $PX_{ik} = PU_{ik} = 0 \forall i, k$ , puis simuler l'opération de la vallée durant une centaine d'années. De ces simulations, les productions moyennes hebdomadaires et annuelles ont été calculées ainsi que les fréquences de dépassement annuelles (sur 100 ans) de chacune des contraintes.

Pour déterminer les fonctions  $F_k(X_{1,k-1}, \dots, X_{4,k-1})$ , pour  $k = 1, \dots, 52$ , nous avons fixé  $F_{52}(X_{1,52}, \dots, X_{4,52}) = 0$  puis solutionner la fonctionnelle (23) à rebours sur une période de 10 ans pour obtenir une solution stationnaire. L'espérance mathématique dans la fonctionnelle (23) est prise par rapport à la variable  $y_k$  qui représente l'apport naturel total à la vallée dans la semaine  $k$ . Il fut considéré, à partir des données enregistrées dans le passé, que cette variable était distribuée normalement pour chaque semaine de l'année avec une moyenne  $\mu_k$  et

un écart-type  $\sigma_k$ . Même si la variable  $y_k$  peut prendre un nombre infini de valeurs, il fut supposé lors de la solution de l'équation (23) qu'elle ne pouvait prendre que 5 valeurs à savoir ;  $\mu_k - 1.83 \sigma_k$ ,  $\mu_k - 0.89 \sigma_k$ ,  $\mu_k$ ,  $\mu_k + 0.89 \sigma_k$ ,  $\mu_k + 1.83 \sigma_k$  avec les probabilités 0.0668, 0.2477, 0.383, 0.2417 et 0.0668 respectivement. De la même façon, même si le réservoir peut prendre un nombre infini d'états il fut supposé une discrétisation en cinq valeurs. C'est donc dire que la solution de l'équation (23) est faite pour cinq valeurs différentes de  $X_{ik}$ ,  $i=1, \dots, 4$ , et cinq valeurs différentes de  $y_k$  et donc 25 fois chaque semaine.

Nous présentons au tableau 3 la moyenne  $\mu_k$  et l'écart-type  $\sigma_k$  de la variable apport naturel  $y_k$  de même que le profil de demande hebdomadaire  $D_k$  qui fut assigné à la vallée. Ce profil représente la proportion de l'énergie annuelle devant être idéalement produite à chaque semaine.

Tableau 3.- Moyenne ( $\mu_k$ ) et écart-type ( $\sigma_k$ ) des apports ; patron de demande ( $D_k$ ) assignée à la vallée.

Table 3.- Mean ( $\mu_k$ ) and standard deviation ( $\sigma_k$ ) of natural inflows ; Weekly demand pattern associated with the system.

SEM. k	$\mu_k$	$\sigma_k$	$D_k$	SEM. k	$\mu_k$	$\sigma_k$	$D_k$	SEM. k	$\mu_k$	$\sigma_k$	$D_k$
1	588	220	.0181	19	195	58	.0240	37	889	342	.0140
2	570	177	.0200	20	183	56	.0240	38	767	186	.0140
3	579	295	.0200	21	172	54	.0240	39	675	150	.0100
4	564	232	.0200	22	161	49	.0240	40	632	171	.0100
5	581	244	.0200	23	172	64	.0240	41	647	176	.0100
6	566	243	.0260	24	197	138	.0240	42	614	181	.0100
7	601	252	.0260	25	211	138	.0240	43	604	210	.0100
8	586	261	.0260	26	341	347	.0240	44	616	148	.0113
9	537	283	.0260	27	505	491	.0240	45	580	181	.0113
10	466	196	.0260	28	754	693	.0240	46	534	169	.0113
11	423	188	.0260	29	1528	858	.0240	47	543	179	.0113
12	353	140	.0260	30	2345	872	.0160	48	504	145	.0113
13	320	136	.0260	31	2701	771	.0160	49	520	149	.0150
14	294	133	.0260	32	2543	870	.0160	50	607	203	.0150
15	258	89	.0260	33	2273	1118	.0160	51	561	150	.0150
16	237	76	.0240	34	1713	924	.0160	52	605	207	.0150
17	223	68	.0240	35	1296	731	.0140				
18	209	60	.0240	36	1043	497	.0140				

Pour obtenir la politique de gestion qui respectera l'ensemble des contraintes probabilistes au niveau de fiabilité déterminé précédemment (5 % pour toutes les contraintes) nous devons ajusté la valeur de  $PU_{ik}$  dans l'équation (22) de sorte que les fréquences obtenues lors des 100 simulations soient inférieures ou égales à la fréquence souhaitée. Toutefois, compte tenu de la dépendance entre les contraintes (compatibilité, incompatibilité), il est très difficile de déterminer une procédure qui agirait sur toutes les contraintes en même temps.

La démarche qui a été suivie consiste à ajuster la valeur de  $PU_{ik}$  pour une contrainte spécifique jusqu'à ce que le niveau de fiabilité souhaité ait été obtenu. Par la suite une deuxième valeur de  $PU_{ik}$  est introduite pour une autre contrainte et est ajustée jusqu'au niveau désiré. Si les contraintes sont dépendantes, les ajustements doivent être effectués aux valeurs  $PU_{ik}$  des contraintes déjà introduites. Cette procédure est répétée jusqu'à ce que toutes les contraintes aient été analysées.

Tableau 4.- Résultats de l'application numérique.

Table 4.- Numerical results

OPTIMISATION		#1		#2		#3		#4		#5		#6		#7		#8	
Site	Contraintes	(1)		(2)													
		PU <sub>ik</sub>	Fréq.	PU <sub>ik</sub>	Fréq.	PU <sub>ik</sub>	Fréq.	PU <sub>ik</sub>	Fréq.	PU <sub>ik</sub>	Fréq.	PU <sub>ik</sub>	Fréq.	PU <sub>ik</sub>	Fréq.	PU <sub>ik</sub>	Fréq.
Gouin	Q < 710	0	5	0	5	0	3	0	2	0	3	0	3	0	3	0	4
Barrage C	Q < 350	0	7	0	8	0	10	0	26	0	24	0	25	1000	13	5000	0
Rapide Blanc	Q < 1416	0	9	0	13	0	19	0	38	6000	4	6000	5	6000	5	6000	4
La Tuque	Q < 2265	0	11	0	12	1000	11	6000	4	6000	6	6500	4	6500	4	6500	4
Mattawin	- Q < 340	0	34	0	34	0	32	0	35	0	34	0	35	0	35	0	34
	- Q < 280	0	32	0	31	0	34	0	44	0	43	0	46	0	46	0	46
	- Q < 340	0	38	0	39	0	35	0	51	0	51	0	40	0	45	0	42
Grand-Mère	Q < 3115	0	7	1000	3	1000	3	1000	2	1000	3	1000	3	1000	3	1000	3
PR (I)		6.65 × 10 <sup>-4</sup>		6.70 × 10 <sup>-4</sup>		6.72 × 10 <sup>-4</sup>		7.56 × 10 <sup>-4</sup>		7.60 × 10 <sup>-4</sup>		7.65 × 10 <sup>-4</sup>		7.60 × 10 <sup>-4</sup>		7.54 × 10 <sup>-4</sup>	

OPTIMISATION		#9		#10		#11		#12		#13		#14		#15	
Site	Contraintes	(1)		(2)											
		PU <sub>ik</sub>	Fréq.	PU <sub>ik</sub>	Fréq.	PU <sub>ik</sub>	Fréq.	PU <sub>ik</sub>	Fréq.	PU <sub>ik</sub>	Fréq.	PU <sub>ik</sub>	Fréq.	PU <sub>ik</sub>	Fréq.
Gouin	Q < 710	0	4	0	3	0	4	0	51	0	7	0	3	0	1
Barrage C	Q < 350	2500	0	1500	16	2000	0	2003	2	2000	1	2000	1	2000	1
Rapide Blanc	Q < 1416	6000	4	6000	5	6000	4	6000	3	6000	3	6000	4	6000	3
La Tuque	Q < 2265	6500	4	6500	4	6500	4	6500	10	6500	7	6500	9	6500	5
Mattawin	- Q < 340	0	34	0	35	0	34	1000	0	500	4	250	2	150	3
	- Q < 280	0	46	0	46	0	46	1000	1	500	0	250	1	250	1
	- Q < 340	0	43	0	44	0	43	1000	2	500	0	250	5	250	4
Grand-Mère	Q < 3115	1000	3	1000	3	1000	3	1000	2	1000	3	1000	2	1000	3
PR (I)		7.52 × 10 <sup>-4</sup>		7.60 × 10 <sup>-4</sup>		7.70 × 10 <sup>-4</sup>		8.81 × 10 <sup>-4</sup>		8.97 × 10 <sup>-4</sup>		8.68 × 10 <sup>-4</sup>		8.62 × 10 <sup>-4</sup>	

(1) PU<sub>ik</sub> : 1 valeurs des pénalités associées aux contraintes de débits.

(2) Fréq. : 1 fréquence de dépassement des contraintes de débits pour 100 simulations.

(1) Penalty values associated to discharge constraints.

(2) Frequency of violations of discharge constraints for 100 simulations.



Le tableau 4 présente les résultats de cette analyse. On y donne pour chacune des optimisations, les valeurs de  $PU_{ik}$ , et les nombres de dépassement obtenues pour 100 simulations.

Dans le cadre de cette étude un total de 15 optimisations ont été effectuées pour obtenir une politique de gestion où toutes les contraintes probabilistes ont une fréquence de dépassement inférieure à 5 %. D'autres optimisations s'avèreraient évidemment nécessaires pour ajuster les fréquences de dépassement de toutes les contraintes le plus près de 5 %.

De plus, de façon à quantifier la perte du pouvoir régulateur de notre système par l'introduction des contraintes nous définirons d'une façon similaire au critère d'optimisation, un critère PR (pouvoir régulateur) qui sera défini de la façon suivante :

$$PR(I) = \sum_{k=1}^{52} (PPB_k - PP_{i,k})^2$$

où

$PR(I)$  : représentera le pouvoir régulateur du scénario  $i$  ;

$PPB_k$  : représentera le pourcentage de production demandé à la semaine  $k$  ;

$PP_{i,k}$  : représentera le pourcentage de production obtenu du scénario  $i$  à la semaine  $k$ .

Ce critère permettra en quelque sorte de juger de la perte de flexibilité entraînée par l'ajout des contraintes. Cette perte de flexibilité se traduira par une plus grande difficulté du système à calquer le profil de production au profil de demande. Naturellement plus il y aura de contraintes imposées au système, plus grande sera la différence entre le profil de production et celui de la demande. Ainsi pour le cas où aucune pénalité n'est appliquée la valeur  $PR(I) = 6.65 \times 10^{-4}$ . Une augmentation de la valeur de PR indiquera une perte dans le pouvoir régulateur du système.

Finalement la figure 3 présente la comparaison des profils de production pour le scénario #1 où aucune contrainte n'est appliquée et pour le scénario #15 où toutes les contraintes ont un niveau de fiabilité acceptable avec le profil de demande.

A l'examen de la figure 3 on constate que même si aucune contrainte n'est appliquée au système, le pouvoir régulateur partiel de nos réservoirs ne permet pas de calquer parfaitement le profil de production au profil de demande.

On peut constater également que plus la fiabilité associée aux contraintes est élevée plus le profil de production s'éloigne du profil de demande. Il est donc possible grâce à ces analyses, d'établir l'impact d'une augmentation de la fiabilité associée aux contraintes sur la production d'électricité.

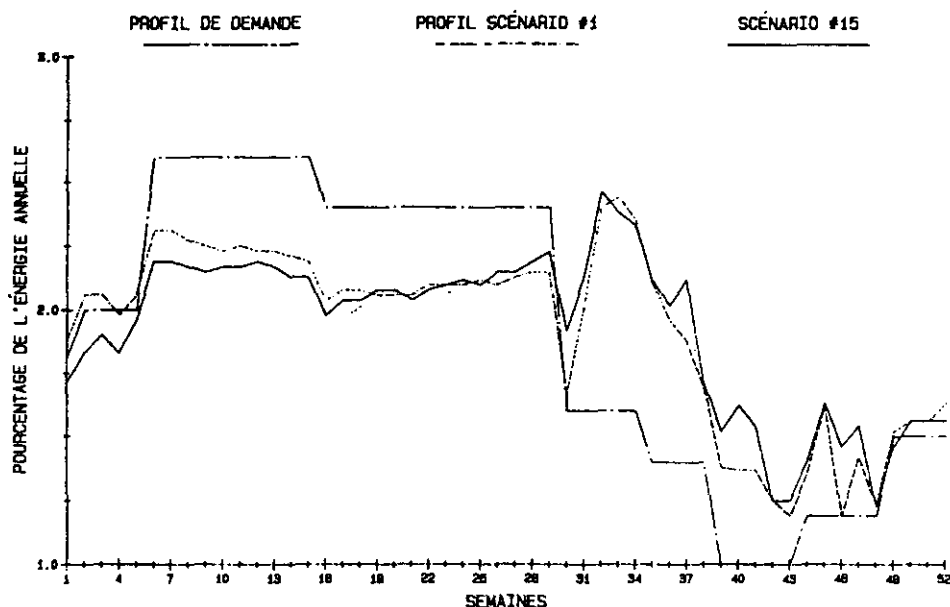


Figure 3.- Comparaison des profils de production pour le scénario #1 sans contrainte et pour le scénario #15 avec contrainte au niveau de fiabilité acceptable.

Figure 3.- Percentage of annual generation Demand curves - Scénario #1 - Scénario #15 - Weeks.

Comparison of weekly generations obtain for case #1 (without constraints) with that obtained for case #15 (with acceptable reliability constraints).

## CONCLUSION

Le problème traité dans cet article consistait à déterminer une politique de gestion hebdomadaire, pour un ensemble d'installations hydro-électriques, qui satisfasse deux critères, à savoir la satisfaction de la demande d'électricité et la prévention des inondations. Dans ce problème, il n'était pas possible de satisfaire la demande d'électricité en tout temps sans augmenter les risques d'inondation au-dessus du niveau acceptable. Il y avait donc un compromis à faire entre les deux critères. Pour déterminer lequel faire, on aurait pu procéder comme dans les études multicritères et déterminer l'ensemble des solutions optimales au sens de Paréto. Mais ceci se serait avéré beaucoup trop long et coûteux en temps de calcul puisque, pour déterminer chaque solution de cet ensemble, il aurait fallu solutionner un problème de programmation dynamique stochastique à quatre variables d'état. Nous avons donc choisi de convertir le critère de prévention des inondations en contrainte probabiliste et solu-

tionner un problème unicritère. Compte tenu de la taille du problème et du fait que les aléas de l'hydraulicité devaient être pris en compte, nous croyons que c'était la seule solution possible. Cette approche est non moins valable que l'approche multicritères puisqu'il est possible, en ajustant progressivement la valeur de la contrainte probabilité, de trouver une solution acceptable à tous les usagers.

---

## RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

---

[1] ARVANITIDIS H.V., ROSING J. (1970). Optimal operation of multireservoir systems using a composite representation. *IEEE Trans. Power App. Syst.*, PAS-89(2): 327-335.

[2] TURGEON A. (1981). "A decomposition method for the long-term scheduling of reservoirs in series". *Water Resour. Res.*, 17(6): 1565-1570.

[3] ROSSMAN L.A. (1977). "Reliability-constrained dynamic programming and randomized release rules in reservoir management". *Water Resour. Res.*, 13(2): 247-255.